Interrogation n°5 — Structures algébriques (sujet A)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit E un ensemble muni d'une l.c.i. $\top$. Quelles propriétés supplémentaires faut-il vérifier pour que $(E,\top)$ soit un groupe ? On les écrira en termes de quantificateurs.

2) Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. On note e et e' les éléments neutres respectifs de G et G'. Donner la définition (ensembliste) du noyau de f, noté $\operatorname{Ker} f$.

3) On pose $H = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que H est un sous-anneau de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\times)$.

Interrogation n°5 — Structures algébriques (sujet B)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $(A,+,\times)$ est un anneau et $a \in A$. Sous quelle condition peut-on dire que a est inversible (on répondra en termes de quantificateurs) ? Quelle structure algébrique particulière possède l'ensemble des éléments inversibles de A ?

2) Soit $(G,\cdot)$ un groupe et $a,b,c \in G$. Simplifier l'expression $(a^{-1}bc)^{-1}a$.

3) Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.